-0-

INTEGRALI DOPPI

Da pag. 1 a pag. 34: 1^a tappa: COORDINATE CARTESIANE

Da pag. 35 a pag. 55: COORDINATE POLARI (2^a tappa)

ANALISI MATEMATICA II MODULO

[INTEGRALI DOPPI – 1ª TAPPA: COORDINATE CARTESIANE]

Prima di iniziare la parte sugli integrali doppi, volevo mettere in evidenza che, sostanzialmente, il Corso di Analisi Matematica II Modulo è un corso "di servizio", che ha per principale scopo far vedere le tecniche di base (tra cui i vari "trucchetti") che servono per poter (iniziare ad) applicare alcuni concetti dell'Analisi Matematica a problematiche di carattere "pratico", quali ad esempio:

1) Approssimazione (e ordine, tipo di approssimazioni) di funzioni mediante polinomi, ed approssimazioni di numeri (possibilmente) irrazionali fino a una fissata cifra decimale esatta (ecco le serie e le serie di Taylor)

2) Ordine asintotico di funzioni e relativo calcolo di limiti (ed ecco il criterio del confronto asintotico per le serie, e ancora, lo sviluppo in serie di Taylor)

3) Elementi di probabilità e statistica matematica: ed ecco i concetti di integrale doppio, integrale generalizzato o improprio, con i quali si introducono:

3a) the probability integral, l'integrale fondamentale della Probabilità e Statistica

3b) la distribuzione normale o di Gauss, che è legata a problemi tipo errori di misura e comportamento, al tendere di n a $+\infty$, di una monetina che viene lanciata n volte

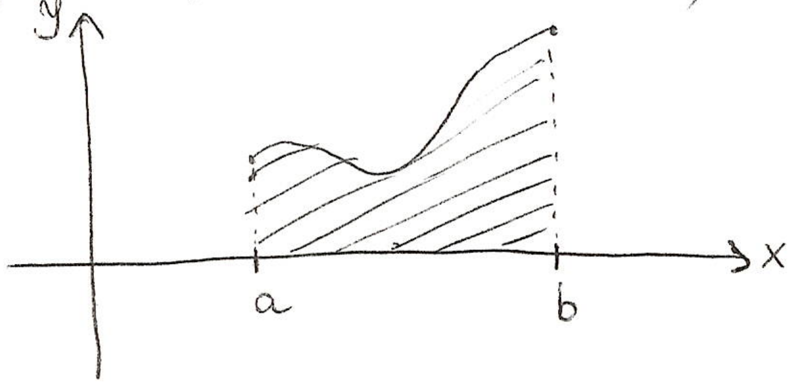
3c) la funzione di ripartizione e la densità, che sono legate al limite di opportune frequenze relative di certi fenomeni

3d) la cosiddetta "Funzione Gamma", che è una generalizzazione del fattoriale, che si estende a numeri non interi, come se fosse, ad esempio, $\left(\frac{1}{2}\right)!$

Cominciamo dagli <u>INTEGRALI DOPPI</u>.

Partiamo dal fatto che, per funzioni sufficientemente "regolari" $\boxed{f \geq 0}$, tra cui per esempio le funzioni continue

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, l'integrale <u>DEFINITO</u> (o alla Riemann) $\int_a^b f(x)\,dx$ esprime l'<u>AREA</u> della zona tratteggiata rappresentata nella seguente figura (in dimensione 2)



Vogliamo estendere questo concetto dalla dimensione 2 alla dimensione 3.

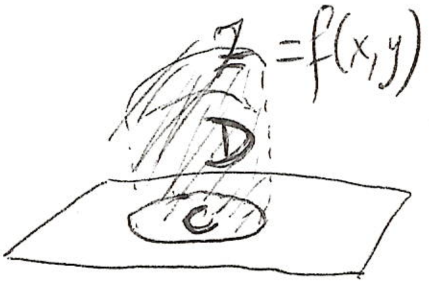
Intanto, che cosa prenderemo al posto dell'<u>area</u>? Il $\boxed{\text{VOLUME}}$! E al posto dell'intervallo $[a,b]$? $[a,b]$ è un sottinsieme della <u>retta</u> reale; e allora, volendo aumentare di una dimensione, prenderemo una <u>FIGURA</u> "buona" del piano $\mathbb{R}^2$.

Sia quindi C una figura "buona" del piano $\mathbb{R}^2$, e sia $f: C \to \mathbb{R}$ una funzione $\boxed{f \geq 0}$. Questa sarà una "funzione di due variabili", e, implicitamente, supporremo che f abbia un andamento "regolare", (per esempio, può essere $f(x,y) = 2x^2y^3$, oppure $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, insomma escluderemo funzioni "strane", quali ad esempio potrebbero essere $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} -3 & \text{se } x \text{ ed } y \text{ sono razionali} \\ 1 & \text{se } x \text{ ed } y \text{ sono irrazionali} \\ 20 & \text{se } x \text{ è razionale ed } y \text{ è irrazionale, o viceversa} \end{cases}$$).

Allora l'integrale doppio $I = \iint_C f(x,y)\,dx\,dy$

sarà il VOLUME DEL SOLIDO D in figura, delimitato dal piano xy (cioè dal piano $z=0$), da C (che supponiamo giacere sul piano xy) e dalla superficie $z = f(x,y)$



$$D = \{(x,y,z) : (x,y) \in C,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

Il solido D in figura è una sottospecie di "cilindro".

Se invece f è una funzione di segno variabile, e $C = C^+ \cup C^-$, ove C^+ [risp. C^-] è l'insieme dei punti di C dove $f(x,y) \geq 0$ [risp. $f(x,y) < 0$], cioè

$$C^+ = \{(x,y) \in C : f(x,y) \geq 0\}, \quad C^- = \{(x,y) \in C : f(x,y) < 0\},$$

allora l'integrale doppio

$$I = \iint_C f(x,y)\, dx\, dy$$

sarà uguale a $I = I_1 + I_2$, ove

$$I_1 = \iint_{C^+} f(x,y)\, dx\, dy \qquad I_2 = \int_{C^-} f(x,y)\, dx\, dy$$

ma I_1 è il volume di cui in Fig. 1, mentre I_2 è il volume di cui in Fig. 2 CAMBIATO DI SEGNO.

Fig. 1

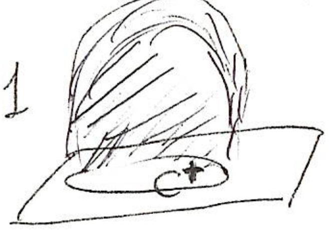


Fig. 2

Infatti, nel caso della Fig. 1, sia l'integrale che il volume sono positivi; mentre nel caso della Fig. 2 l'integrale è negativo (perché la funzione è negativa), mentre il volume è sempre una quantità positiva.

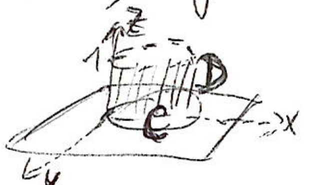
Ora, rimanendo nell' ambito del significato geome=trico dell' integrale doppio, ci poniamo la seguente domanda:

Come si collega l' integrale doppio con l' <u>area</u> di una figura di $\mathbb{R}^2$?

Rispondiamo a questa domanda. Ricordiamo che, per tornare a $\mathbb{R}$, bisogna "scendere di una dimensione". Quindi: Come si collega l' integrale usuale (cioè quello DEFINITO alla Riemann) con la lunghezza $(b-a)$ di un segmento $[a,b]$.

Si ha $\displaystyle\int_a^b 1 \cdot dx = b-a$.

Allora analogamente, "tornando" a $\mathbb{R}^2$, si può vedere che $I = \displaystyle\iint_C 1 \cdot dx\, dy$ = area C



Infatti I = volume del cilindro D =
= area $C \cdot 1$
(area di base · altezza)

$\boxed{\text{L'}\int \text{ DOPPIO SU C DELLA FUNZIONE IDENTICAMENTE UGUALE AD 1 È UGUALE ALL'AREA DI C}}$

<u>Suggerimento</u>: A questo punto è consigliabile ripassare l' area delle figure cosiddette "elementari" (cerchio, triangolo, rettangolo, quadrato, trapezio, eccetera ...), l' equazione della retta, circonferenza, parabola, ecc ....
vedi anche, sulla mia pagina web del corso di laurea in Farmacia.

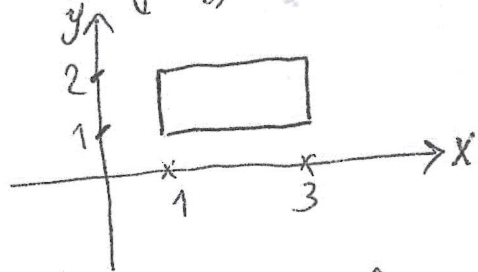
Si dice che un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^2$ è un <u>dominio normale rispetto all' asse</u> x se esistono due numeri reali a, b con $a < b$ e se esistono due funzioni continue $\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\alpha(x) \leq \beta(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ ed $\alpha(x) < \beta(x)$ per qualche $x \in [a,b]$, tali che

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

Si dice che un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^2$ è un <u>dominio normale rispetto all' asse</u> y se esistono due numeri reali c, d con $c < d$ e due funzioni continue $\gamma, \delta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\gamma(y) \leq \delta(y)$ per ogni $y \in [c,d]$ e $\gamma(y) < \delta(y)$ per qualche $y \in [c,d]$, tali che

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}.$$

Per esempio, il rettangolo

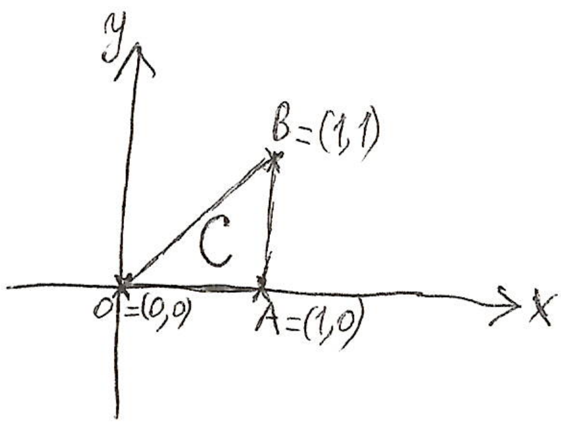


$[1,3] \times [1,2] =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$

è un dominio normale sia rispetto all' asse x che rispetto all' asse y; infatti, rispetto all' asse x, basta prendere $a = 1$, $b = 3$, $\alpha(x) \equiv 1$, $\beta(x) \equiv 2$ le funzioni IDENTICAMENTE uguali rispettivamente a 1 e a 2, e rispetto all' asse y, basta prendere $c = 1$, $d = 2$, $\gamma(y) \equiv 1$, $\delta(y) \equiv 3$ le funzioni <u>identicamente</u> uguali a 1 e a 3.

Anche il triangolo C di vertici $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(1,1)$ è un dominio normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y.



Osserviamo che la retta passante per i punti $O=(0,0)$ e $B=(1,1)$ è la retta $y=x$, cioè la bisettrice del I e del III Quadrante.

Prendiamo spunto da ciò per ripassare un po' di Geometria Analitica.

Per ottenere la retta $y=x$ si può procedere nel seguente modo. L'equazione generica di una retta (non verticale) è $y=mx+q$. Imponendo il passaggio per il punto $(x,y)=(0,0)$ (cioè sostituendo x con 0 ed y con 0) si ottiene $0=m\cdot 0+q=0+q$, quindi $\boxed{q=0,}$ da cui $y=mx$. Imponendo il passaggio per il punto $(x,y)=(1,1)$ (cioè sostituendo x con 1 ed y con 1) si ottiene $1=m\cdot 1$, cioè $\boxed{m=1}$. Quindi si ritrova che l'equazione della nostra retta è $y=1\cdot x+0$, cioè $\boxed{y=x}$.

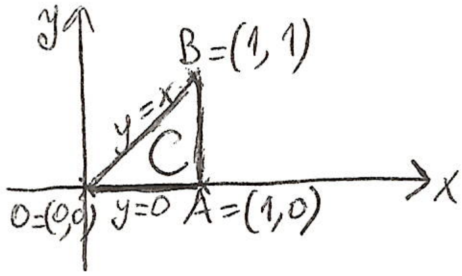
Allo stesso risultato si arriva se si considera l'equazione della retta passante per due punti (x_0,y_0) ed (x_1,y_1). Tale equazione è

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Nel nostro caso, $(x_0, y_0) = (0,0)$ e $(x_1, y_1) = (1,1)$.
Sostituendo opportunamente, otteniamo

$$\frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{x - 0}{1 - 0}, \text{ cioè } \boxed{y = x}.$$

Tornando al triangolo C di prima, allora possiamo dire



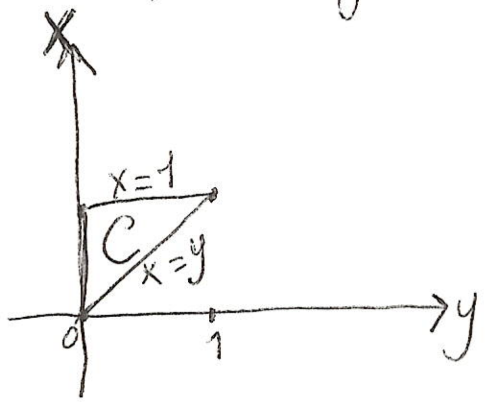
$$C = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

y è compreso tra la funzione identicamente uguale a 0 (cioè, geometricamente, i punti dell'asse x con x compreso fra 0 ed 1) e la retta $y = x$ (cioè, più precisamente: il segmento della retta $y = x$ avente estremi $(0,0)$ ed $(1,1)$). Quindi C è un dominio normale rispetto all'asse delle X.

Adesso vediamo che C è anche un dominio normale rispetto all'asse delle y. Per "vedere" ciò, un'idea "geometrica" può essere la seguente:

ricordiamo come si ottiene il grafico della funzione inversa: si ruota il foglio di $90°$ in senso ANTIORARIO e poi si fa un RIBALTAMENTO NELLO SPAZIO, VEDENDO IL FOGLIO IN CONTROLUCE. Provateci!!

Insomma, il disegno che si ottiene è il seguente:



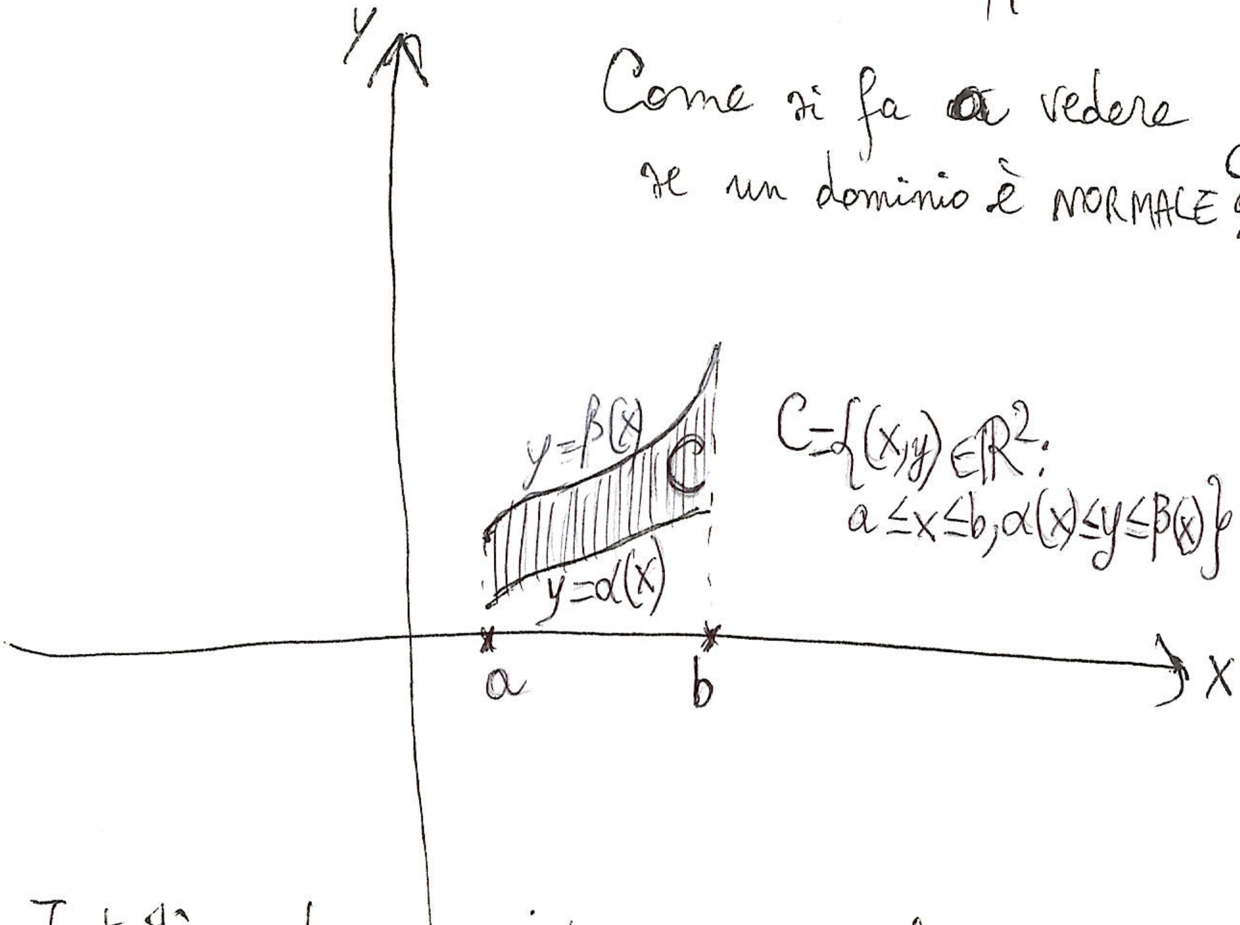
(Abbiamo SCAMBIATO y con x)

e quindi, $C = \{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1 ,\ y \leq x \leq 1 \}$.

(cioè, x varia tra le rette $x=y$ ed $x=1$).
(o meglio tra i corrispondenti segmenti)

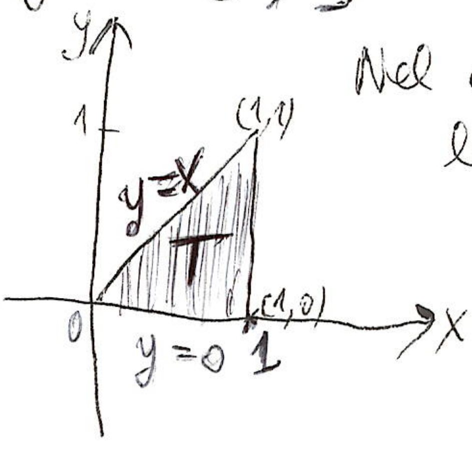
Adesso: come si fa a riconoscere se un insieme è un dominio NORMALE rispetto all' asse delle x (o all' asse delle y) oppure non lo è?

Come si fa a vedere se un dominio è NORMALE?



$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a\le x\le b, \alpha(x)\le y\le\beta(x)\}$

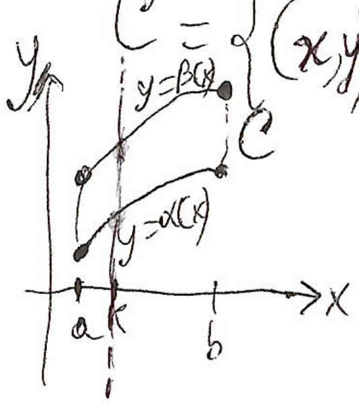
Intuitivamente, un dominio normale rispetto all' asse delle x è un sottoinsieme del piano cartesiano delimitato dai grafici di due <u>funzioni</u> $y=\alpha(x)$ ed $y=\beta(x)$, di cui l' una è più piccola dell' altra, definite in un segmento $[a,b]$ dell' asse delle x



Nel caso del triangolo T, le FUNZIONI y sono $y=0$ ed $y=x$

Da questa idea deriva la formula matematica

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

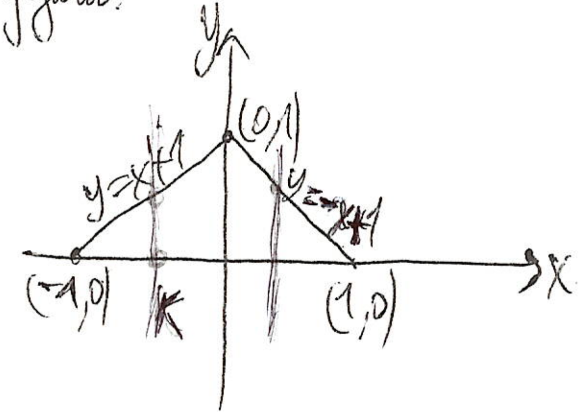


Come si fa a vedere che un dominio è normale rispetto all' asse x? Si parte da:

$x \in [a,b]$. Per ogni k compreso tra a e b, disegniamo la retta VERTICALE $x = k$. I punti di interse-zione della retta con C appartengono sempre alle stesse curve $y = \alpha(x)$ ed $y = \beta(x)$, che non cambiano (la legge) al variare di k: sono sempre le stesse: quella "di sotto" si rappresenta sempre come il grafico di UN'UNICA funzione $y = \alpha(x)$, e così pure quella "di sopra" si rappresenta come il grafico di UN'UNICA funzione $y = \beta(x)$.

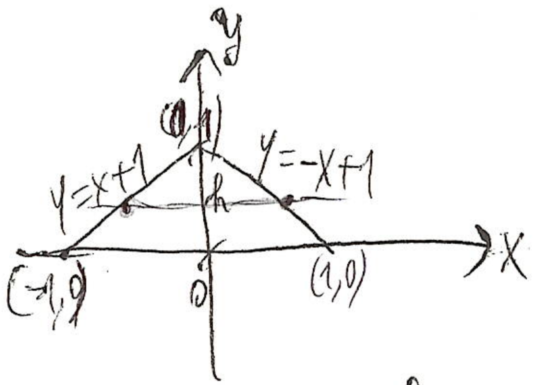
(α e β sono sempre LE STESSE FUNZIONI INDIPENDENTEMENTE DA k).

Consideriamo ora invece il seguente triangolo T in figura:



Allora: x varia tra -1 e 1. Si consideri k compreso tra -1 e 1, e tracciamo le rette $x=k$.

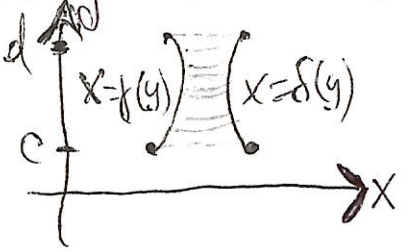
Notiamo che, se $k \in]-1,0[$, allora i punti di intersezione della retta $x=k$ con T appartengono alle rette $y=0$ (l'asse delle x) ed $\boxed{y=x+1}$, mentre, se $k \in]0,1[$, allora i punti di intersezione della retta $x=k$ con T appartengono alle rette $y=0$ ed $\boxed{y=-x+1}$. Quindi $y=0$ ed $y=0$ sono la stessa retta, ma $\boxed{y=x+1}$ ed $\boxed{y=-x+1}$ NON SONO LA STESSA RETTA. Quindi $\alpha(x)$ è univocamente determinata come un'unica funzione, ma $\beta(x)$ NON È univocamente determinata da un'unica funzione. Quindi il triangolo T NON È UN DOMINIO NORMALE RISPETTO ALL'ASSE DELLE x.



Ad $y=x+1$ corrisponde $x=y-1$.
Ad $y=-x+1$ corrisponde $x=-y+1$.
(ricavando la x in funzione della y...)

Consideriamo sempre lo stesso triangolo T della pagina precedente, e facciamo vedere che T è un dominio NORMALE RISPETTO ALL'ASSE DELLE y.
Questa volta partiamo da y: y varia tra 0 e 1.
Adesso, per ogni h compreso fra 0 e 1, $h \in]0,1[$, tracciamo questa volta la retta ORIZZONTALE $\boxed{y=h}$: questa retta incontra il triangolo T in due punti che appartengono SEMPRE alle due stesse funzioni $\gamma(y)=y-1$ e $\delta(y)=-y+1$, che sono sempre UNIVOCAMENTE DETERMINATE, sono sempre LE STESSE. Quindi il dominio T è un dominio normale rispetto all'asse delle y, e lo si parametrizza come

$$T=\{(x,y): 0\leq y\leq 1,\ y-1\leq x\leq -y+1\}.$$



$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: c\leq y\leq d,\ \gamma(y)\leq x\leq \delta(y)\},$$
in generale ...

Adesso, vediamo come si calcolano gli integrali doppi.
Vediamo la FORMULA DI RIDUZIONE, che vale quando C è un dominio normale (rispetto all'asse x e/o rispetto all'asse y), e quando $f: C \to \mathbb{R}$ è una funzione sufficientemente "regolare", "buona":

$$\boxed{\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy}$$

se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ è un dominio normale rispetto all'asse x;

$$\boxed{\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx}$$

se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$ è un dominio normale rispetto all'asse y.

Dunque, IL CALCOLO DEGLI <u>INTEGRALI DOPPI</u> SI RICONDUCE AL CALCOLO DEGLI <u>INTEGRALI DEFINITI</u> (ALLA RIEMANN), e si userà la <u>FORMULA</u> <u>FONDAMENTALE</u> DEL <u>CALCOLO</u> <u>INTEGRALE</u>.

Passiamo ora alla fase operativa.

COME SI CALCOLANO GLI INTEGRALI DOPPI?

1ª cosa da fare a priori:

bisogna distinguere due casi:

A) COORDINATE CARTESIANE (x ed y, "classiche")

B) COORDINATE POLARI (che chiameremo ρ e ϑ, RHO THETA)

In generale si segue il procedimento A) se, nel disegno dell' insieme C, C è delimitato da segmenti; e si segue il procedimento B) se, nel disegno dell' insieme C, C è delimitato da archi curvilinei (per esempio, di circonferenza) (anche se ci possono essere le dovute eccezioni p.es. caso $y=x^2$ ....)

Adesso consideriamo il caso A).

Il primo passo, la prima cosa che si deve fare, è DISEGNARE L'INSIEME C, cioè PARAMETRIZZARE L'INSIEME C.

Bisogna (cercare di) esprimere l' insieme C come un cosiddetto "dominio normale", oppure come unione di un numero finito di "domini normali". Cosa vuol dire?

Sostanzialmente, le tappe da seguire sono 3:

1) DISEGNARE E PARAMETRIZZARE L' INSIEME C

2) STABILIRE SE C È NORMALE RISPETTO ALL' ASSE X O RISPETTO ALL'ASSE Y

3) RISOLVERE GLI INTEGRALI PRESENTI, ATTRAVERSO LA FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE E LA <u>FORMULA DI RIDUZIONE</u>

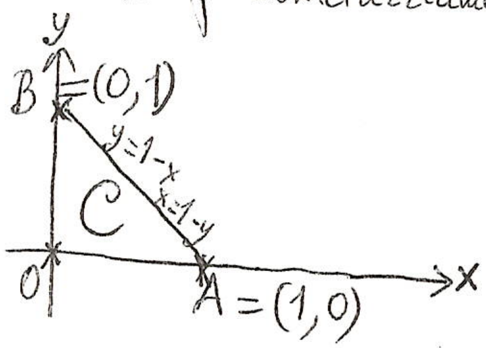
Cominciamo dal seguente

<u>ESERCIZIO 1.</u> Calcolare il seguente integrale doppio:

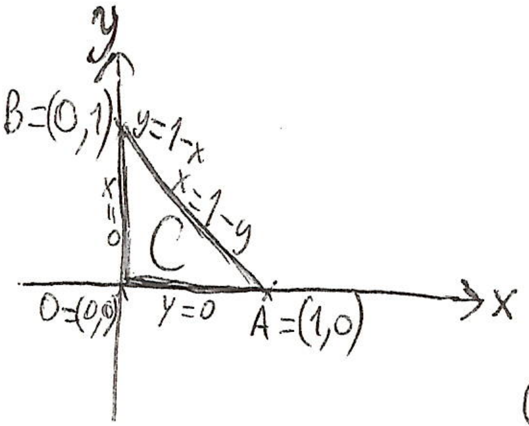
$$I = \iint_C (x+2y)\,dx\,dy$$

ove C è il triangolo di vertici $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,1)$

<u>Svolgimento</u>: Prima di tutto, 1) disegniamo e parametrizziamo l'insieme C.



Determiniamo l'equazione della retta passante per i punti $A=(1,0)$ e $B=(0,1)$. Procedendo come prima, notiamo che l'equazione di una retta non verticale è $y=mx+q$. Imponiamo il passaggio per il punto A. Sostituendo x con 1 ed y con 0, si ottiene $\boxed{0} = m\cdot 1+q = \boxed{m+q}$. Sostituendo (punto B) x con 0 ed y con 1, otteniamo $1 = m\cdot 0+q = 0+q$, cioè $\boxed{q=1}$. Da qui e dal fatto che $m+q=0$, si ottiene $\boxed{m=-1}$. Quindi l'equazione della retta cercata è $\boxed{y=-x+1}$, ossia $\boxed{y=1-x}$ (come l'intuizione suggerisce), che si scrive anche $\boxed{x=1-y}$, $\boxed{x+y=1}$.

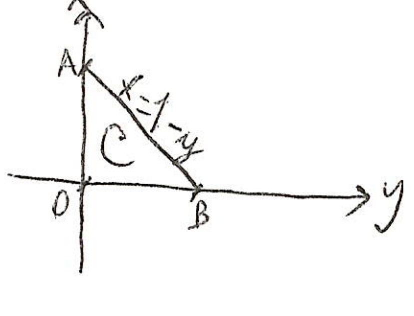


Ora, 2) stabiliamo che C è un dominio normale, sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y. Si ha:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1-x\}$$

y varia tra (i segmenti del)le rette $y=0$ (l'asse delle x) ed $y=1-x$ (attenzione! y non varia tra 0 ed 1, altrimenti l'insieme C sarebbe il <u>quadrato</u> $[0,1]\times[0,1]$: <u>ERRORE DA EVITARE!!</u>). Quindi C è un dominio normale rispetto all'asse x.

Per far vedere che C è un dominio normale rispetto all'asse y, adoperiamo lo stesso procedimento che si fa nel determinare il grafico della funzione inversa: cioè ruotiamo il foglio (in particolare, nella parte <u>in alto a sinistra</u>) di $90°$ in senso antiorario e poi ribaltiamo il foglio stesso, vedendo il disegno in controluce: apparirà così:



e si ha: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq x \leq 1-y\}$.

Quindi C è un dominio normale anche rispetto all'asse y.

3) Adesso, calcoliamo l'integrale doppio richiesto. Lo facciamo dapprima considerando C come un dominio normale rispetto all'asse delle x e poi come un dominio normale rispetto all'asse delle y, e facciamo vedere che i risultati ottenuti <u>COINCIDONO</u> (quest'ultima cosa costituisce una specie di "prova"). Si ha:

$$I = \iint_C (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+2y)\,dy =$$

(N.B.: quando si integra rispetto ad y, la x è come se fosse una costante)

$$= \int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} x\,dy + \int_0^{1-x} 2y\,dy \right] = \int_0^1 dx \left[x \int_0^{1-x} dy + 2\int_0^{1-x} y\,dy \right] =$$

$$= \int_0^1 dx \left[x\left[y\right]_0^{1-x} + \cancel{2}\left[\frac{y^2}{\cancel{2}}\right]_0^{1-x} \right] = \int_0^1 dx \left[x(1-x) + (1-x)^2 \right] =$$

(Abbiamo applicato la FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

$$= \int_0^1 (x - \cancel{x^2} + 1 + \cancel{x^2} - 2x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \int_0^1 1\cdot dx - \int_0^1 x\,dx =$$

(ancora per la FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

$$= \left[x\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(Ripassare la "tabellina" degli integrali!)

Questo, considerando C come dominio normale rispetto all'asse x.

Considerando C come dominio normale rispetto all'asse y, si ha

$$I = \iint_C (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x+2y)\,dx = \text{(stesso procedimento}$$

di prima: quando si integra rispetto ad x, la y è come se fosse una costante)

$$= \int_0^1 dy \left[\int_0^{1-y} x\,dx + \int_0^{1-y} 2y\,dx \right] = \int_0^1 dy \left[\int_0^{1-y} x\,dx + 2y \int_0^{1-y} dx \right] =$$

$$= \int_0^1 dy \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1-y} + 2y \left[x \right]_0^{1-y} \right) = \int_0^1 \left[\frac{(1-y)^2}{2} + 2y(1-y) \right] dy$$

(Abbiamo applicato più volte la FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

$$= \int_0^1 \left(\frac{1+y^2-2y}{2} + \frac{1}{2}\cdot 4y(1-y) \right) dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+y^2-2y+4y-4y^2)\,dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (-3y^2+2y+1)\,dy = \frac{1}{2}\cdot\left[-3\int_0^1 y^2\,dy + 2\int_0^1 y\,dy + \int_0^1 1\cdot dy \right] =$$

(ancora una volta per la FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-3\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \left[y\right]_0^1 \right) = \frac{1}{2}\left((-\cancel{3})\cdot\frac{1}{\cancel{3}} + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cancel{-1}\cancel{+1}+1) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$, che è lo stesso risultato che

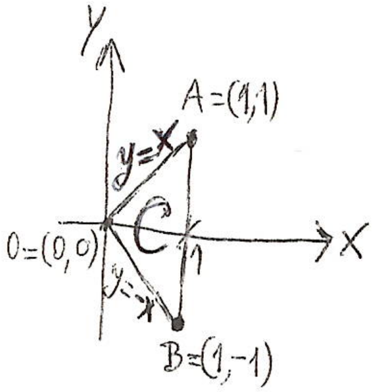
avevamo ottenuto considerando C come dominio normale rispetto all'asse x.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$I_2 = \iint_C \left(e^x + xy\right) dx\,dy$$

ove C è il triangolo di vertici $(0,0), (1,1), (1,-1)$.

Svolgimento. 1) Disegniamo l' insieme C.



Come abbiamo visto nell' Esercizio 1, l' equazione della retta passante per i punti O ed A è $\boxed{y = x}$. Vediamo ora che l' equazione della retta passante per i punti O e B è $\boxed{y=-x}$

[Dalla formula generica dell' equazione della retta, $y = mx + q$, imponiamo il passaggio per il punto O, sostituendo x con 0 ed y con 0. Si ottiene $0 = m \cdot 0 + q = 0 + q$, quindi $\boxed{q = 0}$.
Imponiamo ora il passaggio per il punto $(1,-1)$, sostituendo, in $y = mx$ $(q=0)$, x con 1 e y con -1. Si ottiene: $-1 = m \cdot 1$, da cui $\boxed{m = -1}$. Pertanto l' equazione della retta richiesta è $\boxed{y = -x}$, come si voleva dimostrare.]

2) Esprimiamo C come un dominio normale, rispetto all' asse x. Si ha:

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ -x \le y \le x\right\}.$$

3) Calcoliamo I_2. Si ha: $I_2 = \iint_C \left(e^x + xy\right) dx\,dy =$

$$= \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} \left(e^x + xy\right) dy = \int_0^1 dx \left[\int_{-x}^{x} e^x dy + \int_{-x}^{x} xy\,dy\right] =$$

$$= \int_0^1 dx \left[e^x \int_{-x}^{x} 1\,dy + x \int_{-x}^{x} y\,dy \right]$$ (perché, quando si fa l'integrale rispetto alla y, allora la x, come pure e^x e tutto ciò che dipende da x e non da y, va considerata come se fosse una costante)

= (Applichiamo ora la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale)

$$= \int_0^1 dx \left(e^x [y]_{-x}^{x} + x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{x} \right) = \int_0^1 \Big[e^x (x-(-x)) +$$

$$+ x \Big(\underbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{(-x)^2}{2}}_{= \cancel{x^2/2}} \Big) \Big] dx = \int_0^1 2xe^x + 0 = 2 \int_0^1 x e^x \, dx$$

(Adoperiamo la formula d'integrazione per parti, tenendo conto che x è "facile da derivare" ed e^x è "facile da integrare" e quindi ponendo $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, $g(x) = g'(x) = e^x$. Si ha:

$$\boxed{\int_0^1 f(x) g'(x)\,dx = [f(x) g(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x) g(x)\,dx}$$, cioè

$$\int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = 1 \cdot e^1 - \cancel{0\,e^0} - [e^x]_0^1 = e - (e - e^0) =$$

$$= \cancel{e} - \cancel{e} + 1 = 1$$). Allora possiamo concludere l'esercizio dicendo

$$I_2 = 2 \int_0^1 x e^x \, dx = 2 \cdot 1 = 2.$$

ESERCIZIO 3. Calcolare il seguente integrale doppio:

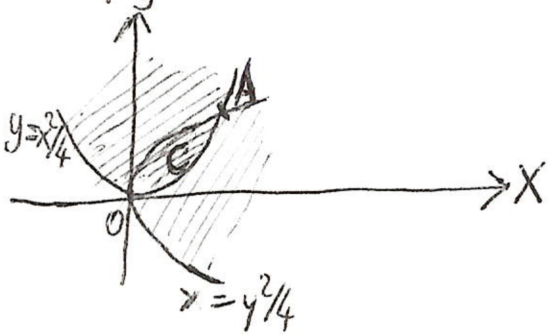
$$I_3 = \iint_C xy \, dx\,dy \qquad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 4x,\ x^2 \leq 4y\}$$

Procediamo com'è stato indicato nello schema

1) Disegniamo l' insieme C.

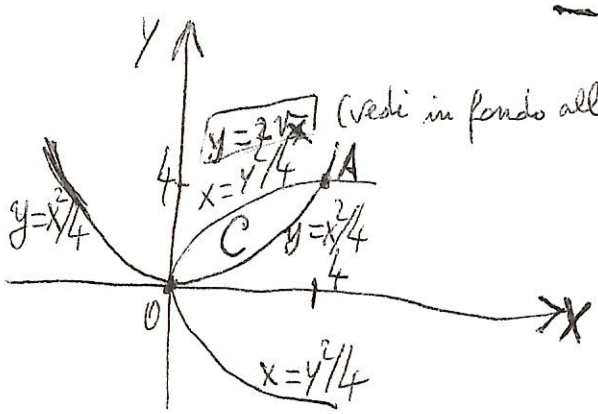
Come prima cosa, cominciamo a disegnare le curve $y^2 = 4x$ e $x^2 = 4y$, cioè rispettivamente

$x = \frac{y^2}{4}$ e $y = \frac{x^2}{4}$



I punti del piano (x,y) tali che $y^2 \leq 4x$ sono quelli tali che $x \geq \frac{y^2}{4}$. Se x è più grande, allora vuol dire che i punti considerati sono quelli che "stanno ad est" rispetto alla parabola $x = \frac{y^2}{4}$, cioè quelli tratteggiati in rosso.

Inoltre, i punti del piano (x,y) tali che $x^2 \leq 4y$ sono quelli tali che $y \geq \frac{x^2}{4}$. Se y è più grande, allora vuol dire che i punti considerati sono quelli che "si trovano a nord" rispetto alla parabola $y = \frac{x^2}{4}$, cioè quelli tratteggiati in blu. Pertanto C è il sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dalla "foglia" delimitata dalle due parabole, cioè dalla zona tratteggiata sia in rosso che in blu. Quali sono le coordinate del punto A?



(vedi in fondo alla pagina: $\boxed{y=2\sqrt{x}}$)

Il punto A è quel punto appartenente all' intersezione delle due parabole $y=\frac{x^2}{4}$ ed $x=\frac{y^2}{4}$, e diverso da O. Calcoliamolo. Si deve avere:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{4} \\ x=\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{1}{4}y^2, \end{cases} \qquad (*)$$

e quindi $x=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^2}{4}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{16}=\frac{x^4}{2^2\cdot 2^4}=\frac{x^4}{2^{2+4}}=\frac{x^4}{2^6}$

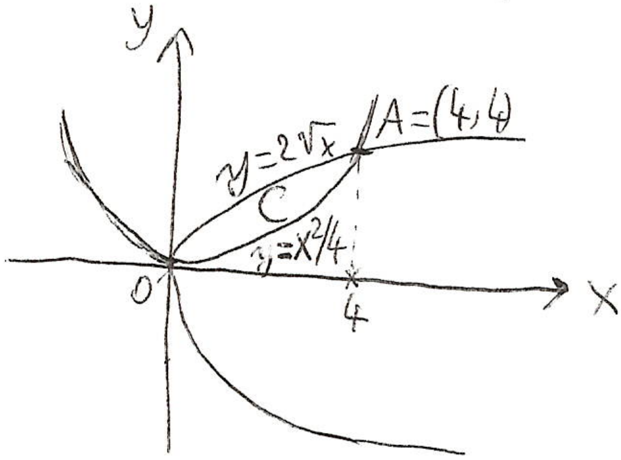
(propietà delle potenze

tra l'altro, notiamo che $(x^2)^2=x^{2\cdot 2}=x^4$; ripassare fa sempre bene!)

Si ottiene $x=\frac{x^4}{2^6}$, cioè $2^6x=x^4$, $2^6=\frac{x^4}{x}=x^{4-1}=x^3$. Pertanto $\boxed{x^3}=2^6=2^{2\cdot 3}$ (sempre $(a^b)^c=a^{bc}$, dove ha senso) $=\boxed{(2^2)^3}$. Da $x^3=(2^2)^3$ si ottiene $\boxed{x}=2^2=\boxed{4}$. Dalla prima delle due equazioni in (*) si deduce $\boxed{y}=\frac{x^2}{4}=\frac{4^2}{4}=\boxed{4}$. Pertanto le coordinate del punto A sono (4, 4).

Adesso, nel ramo <u>superiore</u> della parabola $x=y^2/4$, ci ricaviamo la y in funzione della x. Si ha: $y^2=4x$, da cui $y=2\sqrt{x}$ (notiamo che stiamo considerando solo la "parte superiore" e quindi, tra $+2\sqrt{x}$ e $-2\sqrt{x}$, ho scelto il valore positivo $2\sqrt{x}$).

2) Adesso vediamo che C è un dominio normale rispetto all'asse delle x. Infatti si ha:



$$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 4,\ \frac{x^2}{4}\le y\le 2\sqrt{x}\right\}$$

3) Ora calcoliamo l'integrale richiesto. Si ha:

$$\boxed{I_3}=\iint_C xy\,dx\,dy=\int_0^4 dx\int_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} xy\,dy=$$ (Quando si integra rispetto alla variabile y, la x è come se fosse una costante)

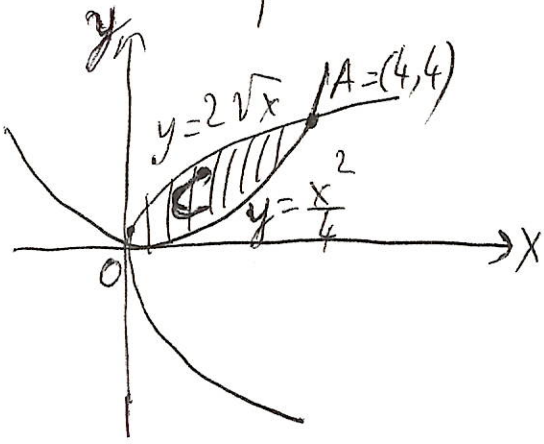
$$=\int_0^4 x\,dx\int_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} y\,dy=\int_0^4 x\,dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2/4}^{2\sqrt{x}}=\int_0^4 x\left(\frac{\cancel{4}^{2}x}{\cancel{8}}-\frac{x^4}{16\cdot 2}\right)dx=$$

$$=\int_0^4\left(2x^2-\frac{x^5}{32}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^6}{6\cdot 32}\right]_0^4=$$ (In virtù della Formula Fondamentale del Calcolo Integrale) $=\frac{2}{3}\cdot 4^3-\frac{4^6}{2\cdot 3\cdot 2^5}=$

$$\frac{128}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4^6}{2^6}=\frac{128}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{2}\right)^6=\frac{128}{3}-\frac{1}{3}2^6=\frac{128}{3}-\frac{64}{3}=\boxed{\frac{64}{3}}.$$

<u>Osservazione</u>: Si ottiene lo stesso dominio C se viene detto che C è l'insieme dei punti (x, y) del piano $\mathbb{R}^2$ delimitato dalle due parabole

$y = \frac{x^2}{4}$ ed $y = 2\sqrt{x}$



Il punto su cui bisogna porre attenzione è, nella "zona" di C, quale delle due funzioni sta sopra e quale sta sotto.

Per $x > 0$, si pone, ad esempio:

$2\sqrt{x} > \frac{x^2}{4}$ se e solo se (visto che siamo davanti a quantità positive, possiamo elevare al quadrato)

$$4x > \frac{x^4}{16} \overset{\text{se e solo se}}{\Longleftrightarrow} \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}} > \frac{x^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{x} \cdot 16} \Longleftrightarrow 16 \cdot 4 > x^3$$

$$\Longleftrightarrow 4 \cdot 4 \cdot 4 > x^3 \Longleftrightarrow 4^3 > x^3 \Longleftrightarrow x < 4$$

Analogamente, si può vedere che, per $x > 0$:

$2\sqrt{x} = \frac{x^2}{4}$ se e solo se $x = 4$,

$2\sqrt{x} < \frac{x^2}{4}$ se e solo se $x > 4$.

Ovviamente, anche per $x = 0$ si ha $2\sqrt{x} = \frac{x^2}{4}$. $(= 0)$

Pertanto, per $0 < x < 4$ si ha che $\boxed{2\sqrt{x} > \frac{x^2}{4}}$, come avevamo visto prima. Ad $x = 0$ corrisponde $y = \frac{x^2}{4} = \frac{0^2}{4} = 0$ oppure $y = 2\sqrt{x} = 2 \cdot 0 = 0$, ad $x = 4$ corrisponde $y = \frac{4^2}{4} = 4$, oppure $y = 2 \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$

Pertanto si ritrova che il punto A di intersezione delle due parabole, diverso dall' origine, è il punto $(4,4)$, come avevamo già visto prima.

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale doppio:

$$I_4 = \iint_C \frac{1}{y+2x}\, dx\, dy,$$

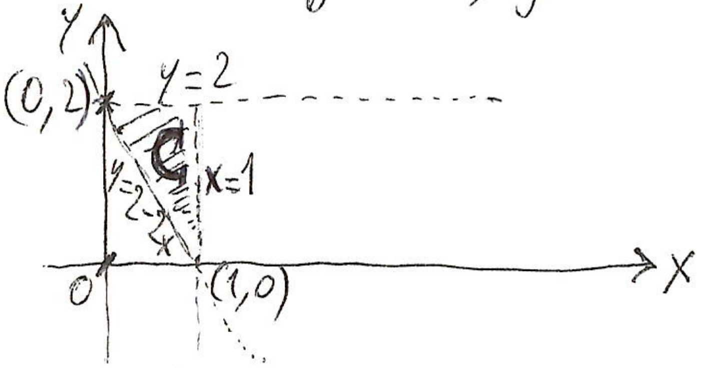
ove $C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \le 1, \ 1-x \le \frac{y}{2} \le 1 \right\}$

Seguiamo sempre il solito schema.

1ª tappa) Cominciamo a disegnare l' insieme C.

Innanzi tutto, si ha $1-x \le \frac{y}{2} \le 1$ se e solo se $\boxed{2-2x \le y \le 2}$

Disegniamo le rette $y=2-2x$, $y=2$ ed $x=1$



Osserviamo che la retta $y=2-2x$ incontra l'asse y nel punto $(0,2)$ (se mettiamo $x=0$, abbiamo $y=2$). Inoltre, la retta $y=2-2x$ incontra l' asse delle x nel punto $(1,0)$: infatti, se poniamo $y=0$, otteniamo $0=2-2x$, $-2x=-2$, e quindi $x=1$. L'insieme C è quello disegnato in figura.

2ª tappa) Vediamo che C è un dominio normale rispetto all' asse x. Si ha infatti

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \quad 2-2x \le y \le 2\},$$

come si può vedere nella figura della pagina precedente.

3ª tappa) Ora, calcoliamo l' integrale doppio. Si ha:

$$I_4 = \iint_C \frac{1}{y+2x}\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{2-2x}^{2} \frac{1}{y+2x}\, dy = \ldots\ldots$$

Adesso, calcoliamo intanto l' integrale $K_x = \int_{2-2x}^{2} \frac{1}{y+2x}\, dy$.

Notiamo che, siccome si integra rispetto alla variabile y, allora la x è come se fosse una costante, e quindi $d(y+2x) = dy + d(2x) = dy + 2\cancel{dx} = dy$. Pertanto

$$K_x = \int_2^{2+2x} \frac{1}{y+2x}\, d(y+2x) = \int_2^{2+2x} \frac{1}{w}\, dw$$ (perché, quando si fa l' integrazione per sostituzione, bisogna CAMBIARE ANCHE GLI ESTREMI: y va da 2 a $2-2x$, e allora $y+2x$ va da $2+2x$ a 2) $=$

$$= \left[\ln|w|\right]_2^{2+2x} = \ln|2+2x| - \ln 2$$ (per la FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE) $=$

$$= \ln\left(\frac{\cancel{2}|1+x|}{\cancel{2}}\right)$$ (per le proprietà fondamentali dei logaritmi, RIPASSARE!)

$= \ln|1+x|$ Quindi $K_x = \ln|1+x|$.

$$I_4 = \iint_C \frac{1}{y+2x}\,dx\,dy = \int_0^1 K_x\,dx = \int_0^1 \ln|1+x|\,dx = \dots$$

(N.B.: si ha: $|1+x| = \begin{cases} 1+x & \text{se } 1+x \geq 0 \text{ cioè se } x \geq -1 \\ -1-x & \text{se } 1+x < 0 \text{ cioè se } x < -1 \end{cases}$)

Siccome x varia tra 0 e 1, allora ci troviamo nel primo caso, e quindi $|1+x| = 1+x$, e pertanto

$I_4 = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \dots$ (facciamo un cambiamento di variabile, $w = 1+x$, $dw = d1 + dx = 0 + dx = dx$: il differenziale d ha lo stesso comportamento della derivata D)

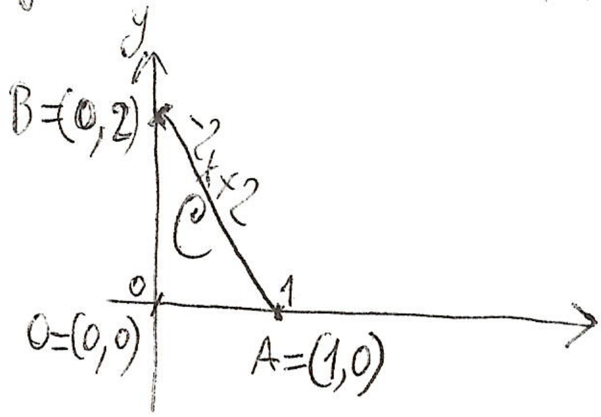
$\dots = \int_1^2 \ln w\,dw$ (perché, quando si fa una sostituzione, allora - come detto prima - bisogna CAMBIARE ANCHE GLI ESTREMI)

$\overset{\text{PER}}{\underset{\text{PARTI}}{=}} \int_1^2 1 \cdot \ln w\,dw = \int_1^2 w' \ln w\,dw = \Big[w \ln w\Big]_1^2 - \int_1^2 \cancel{w} \cdot \frac{1}{\cancel{w}}\,dw =$

(infatti $\int_1^2 f'(w)\,g(w)\,dw = \Big[f(w)\,g(w)\Big]_1^2 - \int_1^2 f(w) \cdot g'(w)\,dw$, $f(w) = w$, $f'(w) = 1$, $g(w) = \ln w$, $g'(w) = \frac{1}{w}$)

$= 2\ln 2 - \cancel{1 \overset{0}{\overset{\parallel}{\ln 1}}} - \Big[w\Big]_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1$ (formula fondamentale del Calcolo Integrale) $= \ln(2^2) - 1 = \ln 4 - 1$ (per le PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEI LOGARITMI, RIPASSARE!!)

$\boxed{\text{ESERCIZIO 5}}$ Calcolare il seguente integrale doppio: $I_5 = \iint_C x^2 y \, dx\, dy$, ove C è il triangolo di vertici $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,2)$



1° passo): Disegniamo l'insieme C.

Determiniamo l'equazione della retta passante per i punti $A=(1,0)$ e $B=(0,2)$. L'equazione generica di una retta non verticale è $y = mx+q$. Imponiamo il passaggio per il punto $A=(1,0)$, sostituendo x con 1 ed y con 0, si ha $0 = m\cdot 1 + q$, cioè $m+q=0$. Imponiamo ora il passaggio per il punto $B=(0,2)$, sostituendo x con 0 ed y con 2. Si ha: $2 = m\cdot 0 + q = q$ Quindi $q=2$, $m=-q=-2$

Pertanto l'equazione della retta passante per A e B è $y=-2x+2$.

2° passo): l'insieme C è un dominio normale rispetto all'asse x: infatti $C=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le -2x+2\}$.

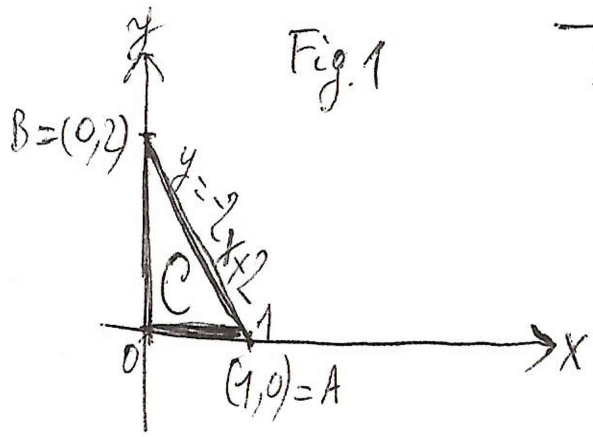


Fig. 1

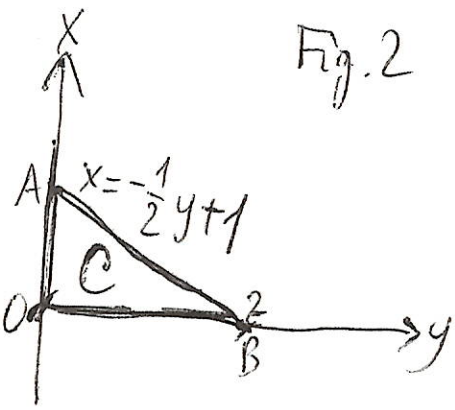


Fig. 2

Notiamo che C è anche un dominio normale rispetto all' asse delle y: infatti, partiamo dalla Fig. 1, ruotiamo di 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ in senso antiorario e facciamo un ribaltamento nello spazio: otteniamo la Fig. 2. [Se viceversa partiamo dalla Fig. 2 e facciamo la stessa procedura, ritorneremo alla Fig. 1]. Quindi si ha:

$$C=\left\{(x,y):\ 0\leq y\leq 2,\ 0\leq x\leq -\frac{1}{2}y+1\right\}$$

3) Facciamo il calcolo dell' integrale. Consideriamo C come un dominio normale rispetto all' asse x. Si ha:

$C=\{(x,y): 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq -2x+2\}$, e quindi

$$I_5=\iint_C x^2 y\,dx\,dy=\int_0^1 dx\cdot x^2\int_0^{-2x+2} y\,dy$$

(quando si integra rispetto a y, la x (e tutto ciò che dipende solo da x) è come se fosse una costante)

$$=\int_0^1 x^2\,dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{-2x+2}=$$

(Formula Fondamentale del Calcolo Integrale) =

$$= \int_0^1 dx \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2x+2)^2 = \int_0^1 \frac{x^2}{\cancel{2}} \cdot \left(\cancel{4}^{\,2}x^2 + \cancel{4}^{\,2} - \cancel{8}^{\,4}x\right)dx =$$

$$= \int_0^1 2x^4\,dx + \int_0^1 2x^2\,dx - \int_0^1 4x^3\,dx =$$ (FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE) $$= \left[\frac{2x^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 - \left[x^4\right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{6+10-15}{15} = \frac{1}{15}.$$

Pertanto $\boxed{\frac{1}{15}}$ è il risultato del nostro integrale doppio.

Adesso consideriamo C come un dominio normale rispetto all'asse y. Si ha: $C = \{(x,y) : 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le -\frac{1}{2}y + 1\}$, e quindi $I_5 = \iint_C x^2 y\,dx\,dy = \int_0^2 dy \cdot y \int_0^{-(1/2)y+1} x^2\,dx$ (quando si integra rispetto alla x, allora la y è come se fosse una costante, come anche tutto ciò che dipende soltanto dalla y e non dalla x è come se fosse una costante) =

$$= \int_0^2 y\,dy \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{-(1/2)y+1} =$$ (Formula Fondamentale del Calcolo Integrale)

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 y\,dy \cdot \left(-\frac{y}{2} + 1\right)^3 = \frac{1}{3}\int_0^2 y\left(-\frac{y^3}{8} + \frac{3}{4}y^2 - 3\frac{y}{2} + 1\right)dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 \left(-\frac{y^4}{8}+\frac{3}{4}y^3-3\frac{y^2}{2}+y\right)dy =$$ (ancora una volta per la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale)

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{-y^5}{40}+\frac{3}{16}y^4-\cancel{3}\frac{y^3}{\cancel{3}\cdot 2}+\frac{y^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{\cancel{32}^{4}}{\cancel{40}_{5}}+\frac{3}{\cancel{16}}\cdot\cancel{16}-\cancel{\frac{8}{2}}+\cancel{\frac{4}{2}}\right] = \frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{15}}.$$

Abbiamo dunque trovato di nuovo $\boxed{\frac{1}{15}}$; quindi abbiamo fatto vedere che il risultato è lo $\boxed{\text{stesso}}$, sia che il dominio (è considerato normale rispetto all'asse delle x, sia se è considerato normale rispetto all'asse delle y.

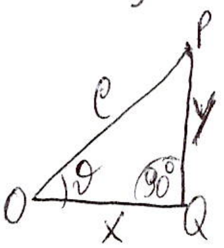
INTEGRALI DOPPI: 2ª TAPPA (COORDINATE POLARI)

Nella "1ª tappa" sugli integrali doppi abbiamo visto come funziona la tecnica per calcolare gli integrali doppi nel caso in cui si usano le coordinate cartesiane.
Talvolta però, soprattutto nei casi in cui il dominio C considerato si disegna attraverso archi di curve, per esempio circonferenze, è più conveniente usare un altro tipo di coordinate del piano Cartesiano $\mathbb{R}^2$, cioè le <u>COORDINATE POLARI</u> (anche se non c'è una regola ben precisa) (per esempio con curve in forma "esplicita" tipo $y = x^2$, $y = f(x)$ spesso si usano le coord. cartes.)
L'idea è considerare le coordinate polari ρ (RHO) e ϑ (THETA) al posto delle coordinate cartesiane x ed y, e poi disegnare C e far vedere che C è un dominio normale rispetto a ρ e/o un dominio normale rispetto a ϑ. E infine, calcolare il nostro integrale doppio.

Cominciamo ad introdurre le coordinate polari.

Partiamo dalla "risoluzione" (o dalle principali proprietà) dei triangoli rettangoli.

Ripassare le definizioni di seno e coseno e le principali proprietà della trigonometria (anche, p. es. sulla mia pagina web, corso di laurea in Farmacia, dove c'è anche un "precorso").



Consideriamo il triangolo rettangolo OPQ. OQ e PQ sono i due cateti, OP è l'ipotenusa. Per definizione di seno e di coseno, si ha: $\sin\vartheta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$ (cioè

$$\sin\vartheta = \frac{\text{lunghezza del segmento } PQ}{\text{lunghezza del segmento } OP} = \frac{\text{lunghezza cateto } y}{\text{lunghezza ipotenusa } \rho}\Big),$$

$$\cos\vartheta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \Big(\text{cioè } \cos\vartheta = \frac{\text{lunghezza del segmento } OQ}{\text{lunghezza del segmento } OP} =$$

$$= \frac{\text{lunghezza cateto } x}{\text{lunghezza ipotenusa } \rho}\Big),$$ da cui $\sin\vartheta = \frac{y}{\rho}$, $\cos\vartheta = \frac{x}{\rho}$,

e quindi

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta \end{cases}}$$

Le coordinate polari sono dunque ρ e ϑ, ove ρ è la distanza di P da O ($\overline{OP}$) e ϑ è l'angolo $Q\hat{O}P$ formato dal segmento OP con il semiasse positivo delle x

Quindi le coordinate cartesiane corrispondono ai cateti x ed y del triangolo rettangolo in figura, mentre le coordinate polari corrispondono all'ipotenusa ρ e all'angolo ϑ in figura.

Inoltre, dal <u>TEOREMA DI PITAGORA</u> si ha

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

, e quindi

$$\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2}$$

, una relazione che ci sarà molto utile in seguito.

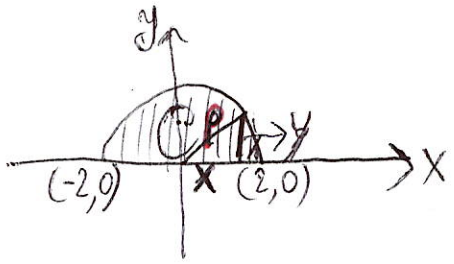
Notiamo che ρ va da 0 a $+\infty$, mentre ϑ varia da 0 a 2π.

Ora, similmente a com'era stato fatto con le coordinate cartesiane x ed y, diremo che $C \subset \mathbb{R}^2$ è un <u>dominio normale rispetto alla variabile</u> ρ se esistono due numeri reali a, b con $a < b$ e due funzioni continue $\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $\alpha(\rho) \leq \beta(\rho)$ per ogni $\rho \in [a,b]$ ed $\alpha(\rho) < \beta(\rho)$ per almeno un $\rho \in [a,b]$, con

$$C = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \rho \leq b,\ \alpha(\rho) \leq \vartheta \leq \beta(\rho)\}.$$

Inoltre, diremo che $C \subset \mathbb{R}^2$ è un <u>dominio normale rispetto alla variabile</u> ϑ se esistono due numeri reali c, d con $c < d$ e due funzioni continue $\gamma, \delta : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $\gamma(\vartheta) \le \delta(\vartheta)$ per ogni $\vartheta \in [c, d]$ e $\gamma(\vartheta) < \delta(\vartheta)$ per almeno un $\vartheta \in [c, d]$, con

$$C = \{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : c \le \vartheta \le d, \ \gamma(\vartheta) \le \rho \le \delta(\vartheta) \}.$$



Per esempio, il semicerchio nord

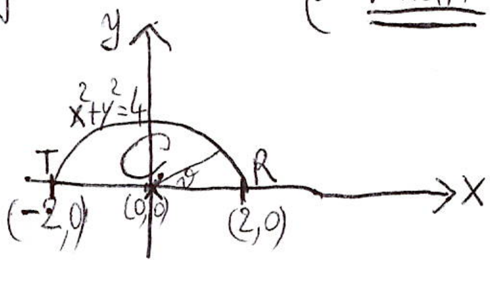
$$C = \{ (x, y) : 0 \le x^2 + y^2 \le 4, \ y \ge 0 \}$$

si esprime anche come $C = \{ (\rho, \vartheta) : 0 \le \rho \le 2, 0 \le \vartheta \le \pi \}$.

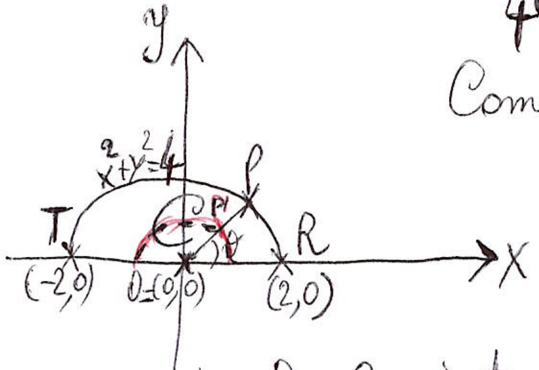
Perché? Innanzi tutto osserviamo che $x^2 + y^2 = 4$ è l'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio 2. Per vedere ciò, osserviamo che $\sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza di un generico punto (x, y) del piano $\mathbb{R}^2$ dall'origine (basta <u>vederlo con il</u> TEOREMA DI PITAGORA, oppure applicare la formula della distanza fra 2 punti, vedi per esempio sempre la mia pagina web, corso di Laurea in Farmacia, precorso e materiale simile). Quindi, per DEFINIZIONE, la circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano (x,y) equidistanti da un punto fisso, detto centro, e questa distanza è uguale al RAGGIO. Se indichiamo con (x_0, y_0) le coordinate del centro, allora, come prima, attraverso il TEOREMA DI PITAGORA oppure la formula della distanza tra due punti, si ottiene $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R$, ossia

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$, ove R è il raggio della nostra circonferenza. Quindi $x^2+y^2=4$ corrisponde a $(x-0)^2+(y-0)^2 = 2^2$, e si ritrova che $x^2+y^2=4$ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2 (RIPASSARE BENE L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA !!! v. anche sempre la mia pagina web, corso di laurea in Farmacia)

Ma C è costituito dai punti interni alla circonferenza $x^2+y^2=4$ tali che $y \geq 0$; in tali punti, la quantità $\sqrt{x^2+y^2}$ (che è la distanza del punto (x,y) dall'origine) varia tra 0 e 2. Ma $\sqrt{x^2+y^2}$ è propio ρ: quindi possiamo affermare che ρ VARIA TRA 0 e 2.



Adesso, guardando la figura, vediamo come varia l'angolo ϑ.

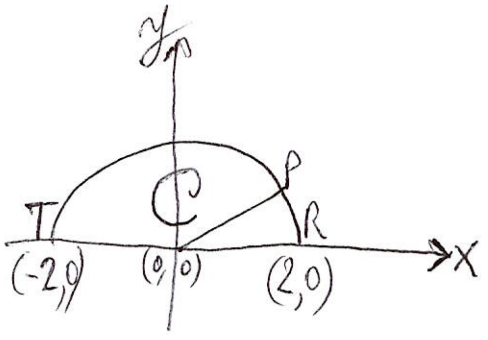


Come varia l'angolo ϑ?

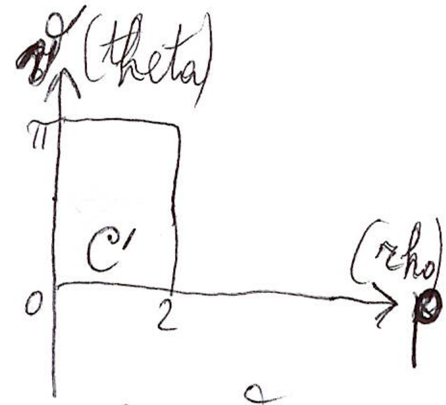
Il punto P (come se fosse una specie di "puntatore"), quando $\vartheta = 0$, si trova nella posizione R. Poi, man mano che ϑ va da 0 a π, si sposta DA DESTRA A SINISTRA lungo la parte "nord" della circonferenza $x^2+y^2=4$, fino a raggiungere la posizione T in corrispondenza all'angolo $\vartheta = \pi$. Analogamente, nella figura, un punto P' appartenente al segmento avente estremi O e P, mentre ϑ va da 0 a π, descrive un arco di circonferenza sempre di centro O, ma avente come raggio la distanza OP', quindi una circonferenza "concentrica" alla circonferenza $x^2+y^2=4$ (quella piccola), sempre muovendosi da destra a sinistra. Per $\vartheta=\pi$ tutti i punti della circonferenza di centro l'origine e di raggio OP' vengono raggiunti, e non ve ne sono altri, perché dobbiamo essere sul semicerchio nord.

In conclusione, ϑ VARIA TRA 0 e π.

Quindi $\boxed{C = \{(\rho, \vartheta) : 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi\}}$, e pertanto C è un dominio normale, sia rispetto alla variabile ρ che rispetto alla variabile ϑ.



x ed y:
COORDINATE CARTESIANE



ρ e ϑ:
COORDINATE POLARI

Quindi, da un punto di vista GEOMETRICO, nel passare dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari, il semicerchio nord di centro l'origine e raggio 2 viene "trasformato" nel rettangolo $C' = [0,2] \times [0,\pi]$.
Quindi si procederà come se C fosse C'.
Quando si farà l'integrale doppio nelle coordinate polari, e si fa il cambio di coordinate $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$, allora bisogna moltiplicare il tutto per il fattore "magico" ρ. Ma da dove "sbuca fuori" ρ?
Il fattore ρ si chiama anche <u>JACOBIANO</u> <u>DELLA</u> <u>TRASFORMAZIONE</u>

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad (*)$$

Per definizione, lo Jacobiano della trasformazione $(*)$ è

$$J = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\vartheta} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial y}{\partial\vartheta} - \frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}.$$

(det denota il determinante della matrice)

Essendo $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$, si ha $\dfrac{\partial x}{\partial\rho}=\cos\vartheta$ (il simbolo $\dfrac{\partial x}{\partial\rho}$ denota la <u>derivata</u> <u>parziale</u> di x rispetto a ρ, cioè la derivata di $x=\rho\cos\vartheta$ rispetto solo a ρ, ossia come ~~se~~ se la variabile ϑ e tutto ciò che dipende da ϑ fossero delle <u>costanti</u>: e quindi si ottiene $\dfrac{\partial x}{\partial\rho}=\cos\vartheta$). Analogamente, si ha

$$\frac{\partial x}{\partial\vartheta}=\frac{\partial(\rho\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}=-\rho\sin\vartheta$$

(perché la derivata di $\cos\vartheta$ è $-\sin\vartheta$, e ρ, in questo caso, è una costante moltiplicativa); inoltre $\dfrac{\partial y}{\partial\rho}=\dfrac{\partial(\rho\sin\vartheta)}{\partial\rho}=\sin\vartheta$, procedendo analogamente come prima, e infine

$$\frac{\partial y}{\partial\vartheta}=\frac{\partial(\rho\sin\vartheta)}{\partial\vartheta}=\rho\cos\vartheta.$$

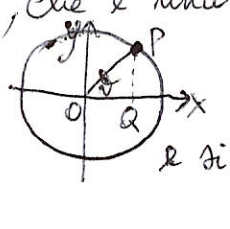
Dunque otteniamo

$$\text{Jacobiano}=J=\frac{\partial x}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial y}{\partial\vartheta}-\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}=$$

$$=\cos\vartheta\cdot\rho\cos\vartheta-(-\rho\sin\vartheta)\cdot\sin\vartheta=\rho\cos^2\vartheta+\rho\sin^2\vartheta=$$

$$=\rho(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)=\rho\cdot 1=\rho$$

(per l'identità fondamentale della trigonometria $\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta=1$, che è una conseguenza del teorema di Pitagora

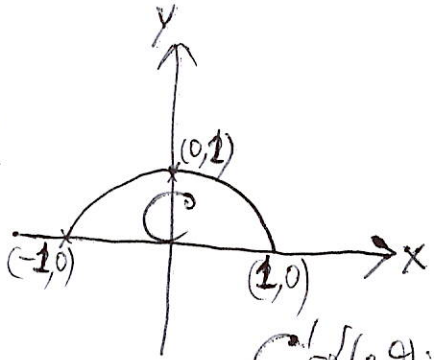


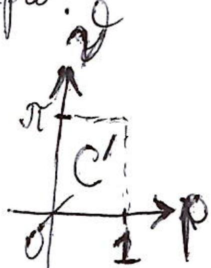
Sia il raggio $OP=1$
$\sin\vartheta=\overline{PQ}$, $\cos\vartheta=\overline{OQ}$
e si applica PITAGORA)

Quindi si ritrova il fattore "magico" ρ, che è uguale al nostro Jacobiano J.

Dicevamo che, quando si calcola l'integrale doppio e si adoperano le coordinate polari, bisogna moltiplicare per ρ quello che si sta facendo con il calcolo del nostro integrale. Facciamo un esempio.

Consideriamo il semicerchio nord C, delimitato dalla parte nord della circonferenza $x^2+y^2=1$ (cioè dalla curva $y=\sqrt{1-x^2}$) e dall'asse delle x.





$C'=\{(\rho,\vartheta): 0\le\rho\le 1,\ 0\le\vartheta\le\pi\}$

Dalla Geometria elementare sappiamo che $\text{area } C = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2}$ (ricordiamo che il raggio del semicerchio nord è 1).

Dal significato geometrico dell'integrale doppio, sappiamo che

$\text{area } C = \iint_C 1\cdot dx\,dy =$ (visto che bisogna moltiplicare per lo Jacobiano ρ) $= \iint_{C'} \rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^\pi d\vartheta$ (perché $C'=\{(\rho,\vartheta): 0\le\rho\le 1,\ 0\le\vartheta\le\pi\}$) $= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\vartheta\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$, e quindi si ritrova il valore $\frac{\pi}{2}$, che già sapevamo.

Se non si fosse dovuto moltiplicare per ρ, avremmo ottenuto: area $C = \iint\limits_{C'} d\rho\, d\vartheta = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi} d\vartheta = 1 \cdot \pi, \pi,$ il che è errato.

Inoltre, se C è il semicerchio nord di centro l'origine e raggio R, delimitato dalla parte nord della circonferenza $x^2+y^2=R^2$ (cioè dalla curva $y=\sqrt{R^2-x^2}$) e dall'asse delle x. Procedendo analogamente come a pag. 43, si ha: area $C = \iint\limits_{C} 1 \cdot dx\, dy = \iint\limits_{C'} \rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{\pi} d\vartheta$

$$\left(\text{perché } C' = \{(\rho,\vartheta) : 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \vartheta \le \pi\}\right) = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R \cdot \left[\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{R^2}{2} \cdot \pi = \frac{\pi R^2}{2},$$

cosa che già sapevamo dalla Geometria elementare.

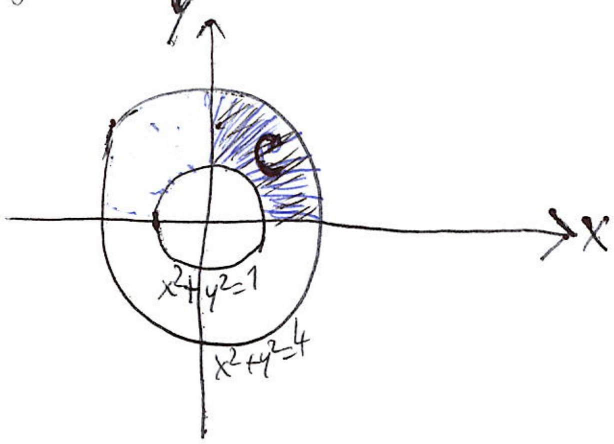
Adesso facciamo qualche esercizio sugli integrali doppi con le coordinate polari.

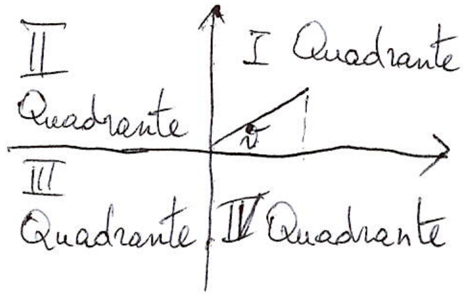
ESERCIZIO 1 Calcolare il seguente integrale doppio:

$$I_1 = \iint_C \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy \;,$$

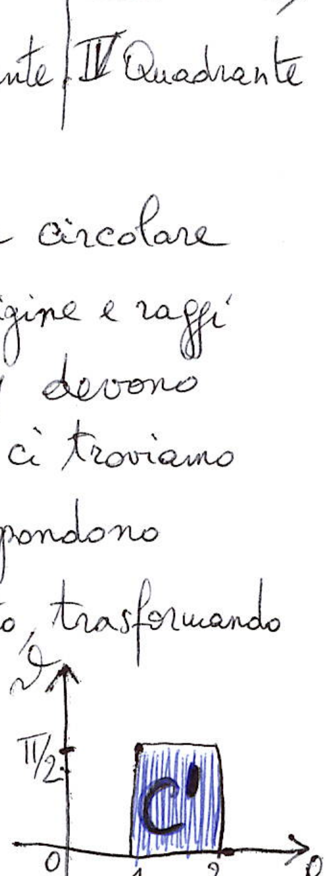
ove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0, y \ge 0\}$.

Punto 1) Disegniamo l'insieme C.





Dobbiamo innanzi tutto considerare la corona circolare delimitata dalle circonferenze di centro l'origine e raggi rispettivamente 1 e 2. Inoltre, x ed y devono essere <u>tutti</u> e <u>due</u> non negativi, e quindi ci troviamo nel I° Quadrante. Al I° Quadrante corrispondono valori di ϑ compresi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Pertanto, trasformando C in C' mediante le coordinate polari, si ha:



Punto 2) $C' = \{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\}$, quindi C' è un dominio <u>NORMALE</u> <u>sia rispetto a ρ</u> <u>sia rispetto a ϑ</u>.

Punto 3) Calcoliamo il nostro integrale doppio, passando alle coordinate polari e moltiplicando per il fattore "magico" ρ. Si ha:

$$\boxed{I_1 =} \iint_C \frac{x\,y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \quad \left(\text{teniamo conto che } x=\rho\cos\vartheta,\ y=\rho\sin\vartheta,\ x^2+y^2=\rho^2\right)$$

$$= \iint_{C'} \frac{(\cancel{\rho}\cos\vartheta)\cdot(\cancel{\rho}\sin\vartheta)}{\cancel{\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_1^2 \rho\,d\rho \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta\cdot D(\sin\vartheta)\,d\vartheta = \ldots$$

(Poniamo $w=\sin\vartheta$. Poiché ϑ varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$, allora $\sin\vartheta$ va da 0 a 1. Inoltre si ha: $dw = \frac{dw}{d\vartheta}\cdot d\vartheta \underset{\text{(trucchetto)}}{=} D(\sin\vartheta)\,d\vartheta = \cos\vartheta\,d\vartheta$, quindi, sostituendo, si ottiene:)

$$\ldots = \left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^1 w\,dw = \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} \boxed{= \frac{3}{4}}.$$

[Abbiamo applicato la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale]. Allo stesso risultato $\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}$ si ottiene applicando la formula di duplicazione $\boxed{\sin(2\vartheta) = 2\sin\vartheta\cos\vartheta}$. Infatti si ha:

$$\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\vartheta)}{2} \, d\vartheta = \ldots$$ [Andiamo a fare una sostituzione: $v = 2\vartheta$. Dato che ϑ varia tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, allora 2ϑ varia tra 0 e π. Inoltre $d(2\vartheta) = 2\, d\vartheta$, perché il differenziale d ha lo stesso comportamento della derivata D, e quindi $d\vartheta = \frac{d(2\vartheta)}{2}$]

$$\ldots = \int_0^{\pi} \frac{\sin(2\vartheta)}{2} \cdot \frac{d(2\vartheta)}{2} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin v \, dv =$$ (Formula Fondamentale del Calcolo Integrale) $$= \frac{1}{4}\left[-\cos v\right]_0^{\pi} =$$

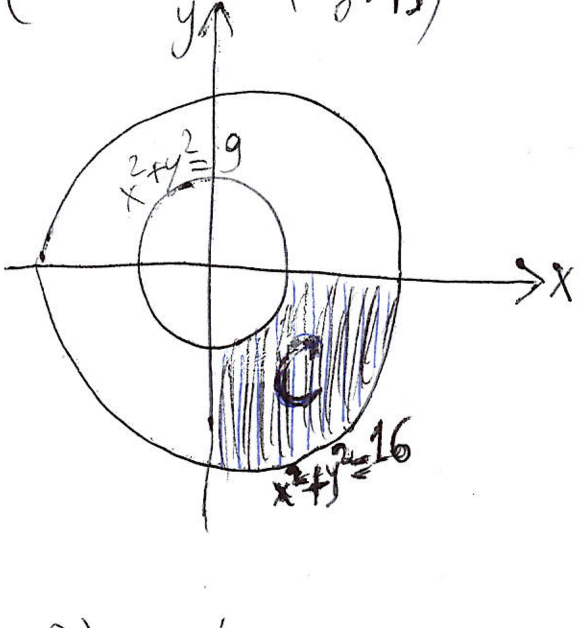
$$= \frac{1}{4}\left(-\cos\pi - (-\cos 0)\right) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$ come volevamo dimostrare.

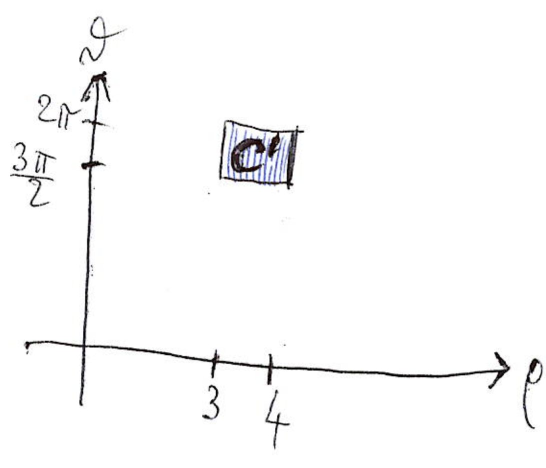
Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$I_2=\iint_C (x+y^2)\,dx\,dy \,, \quad \text{ove}$$

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 9\le x^2+y^2\le 16,\ x\ge 0,\ y\le 0\}$$

1) Procedendo similmente come nell' Esercizio 1, consideriamo la corona circolare delimitata dalle circonferenze di centro l'origine e di raggi rispettivamente 3 e 4. Inoltre x è nonnegativo ed y è nonpositivo: quindi ci troviamo nel 4° Quadrante. Al 4° Quadrante corrispondono valori di ϑ compresi fra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π. Pertanto, (v. anche pag. 45) passando a coordinate polari, si ha:





2) $C'=\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2 : 3\le\rho\le 4,\ \frac{3\pi}{2}\le\vartheta\le 2\pi\}$, quindi C' è un dominio <u>NORMALE</u> <u>sia rispetto</u> a ρ <u>che rispetto</u> a ϑ.

3) Calcoliamo il nostro integrale doppio, passando alle coordinate polari e moltiplicando per il fattore "magico" ρ. Si ha, tenendo conto che $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$:

$$\boxed{I_2 =} \iint_C (x+y^2)\,dx\,dy = \iint_{C'} (\rho\cos\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta)\cdot\rho\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \iint_{C'} \rho^2\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta + \iint_{C'} \rho^3\sin^2\vartheta\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$\left[C' = \left\{ (\rho,\vartheta) : \ 3 \le \rho \le 4,\ \tfrac{3}{2}\pi \le \vartheta \le 2\pi \right\} \right]$$

$$= \int_3^4 \rho^2\,d\rho \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos\vartheta\,d\vartheta + \int_3^4 \rho^3\,d\rho \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_3^4 \left[\sin\vartheta\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_3^4 \cdot J_2, \text{ ove } J_2 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2\vartheta\,d\vartheta$$

$$= \left(\frac{64}{3} - \frac{27}{3}\right)\cdot\left(\sin 2\pi - \sin\frac{3\pi}{2}\right) + \left(\frac{256}{4} - \frac{81}{4}\right)\cdot J_2 =$$

$$= \frac{37}{3}\cdot\big(0 \overset{1}{\cancel{-(-1)}}\big) + \frac{175}{4}\cdot J_2$$

Per calcolare J_2, calcoliamo dapprima l'integrale indefinito $K_2 = \int \sin^2\vartheta \, d\vartheta$.

Applichiamo la formula di integrazione per parti

$$\boxed{\int f'(\vartheta) g(\vartheta)\, d\vartheta = f(\vartheta) g(\vartheta) - \int f(\vartheta) g'(\vartheta)\, d\vartheta}$$

Nel nostro caso, $g(\vartheta) = \sin\vartheta$, $g'(\vartheta) = \cos\vartheta$, $f'(\vartheta) = \sin\vartheta$, e quindi $f(\vartheta) = -\cos\vartheta$. Si ha:

$$\boxed{K_2} = \int \sin^2\vartheta\, d\vartheta = -\cos\vartheta\sin\vartheta - \int(-\cos\vartheta)\cdot(\cos\vartheta)\, d\vartheta =$$

$$= -\cos\vartheta\sin\vartheta + \int \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \Big(\boxed{\text{TRUCCHETTO!}}$$

$\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$, come visto in precedenza, e quindi

$$\boxed{\cos^2\vartheta = 1 - \sin^2\vartheta}\Big) = -\cos\vartheta\sin\vartheta +$$

$$+\int(1-\sin^2\vartheta)\, d\vartheta = -\cos\vartheta\sin\vartheta + \int 1\cdot d\vartheta - \int \sin^2\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \boxed{-\cos\vartheta\sin\vartheta + \vartheta - K_2\ (+c)}$$, da cui

$$\boxed{2K_2 = -\cos\vartheta\sin\vartheta + \vartheta\ (+2c)}$$

(N.B.: dire $+c$ oppure $+2c$ è la stessa cosa)

Infatti una famiglia di costanti arbitrarie può essere indicata sia con c che con $2c$

Perciò $K_2 = \dfrac{-\cos\vartheta\sin\vartheta + \vartheta}{2} + c$

Calcoliamo ora l'integrale $J_2 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2\vartheta \, d\vartheta$ (vedi p. 49)

Teniamo conto che il corrispondente integrale indefinito

$$K_2 = \int \sin^2\vartheta \, d\vartheta = \frac{-\cos\vartheta \sin\vartheta + \vartheta}{2} + c$$

Applichiamo ora la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale. Si ottiene:

$$\boxed{J_2} = \left[\frac{-\cos\vartheta \sin\vartheta + \vartheta}{2}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{-\cos(2\pi)\overset{0}{\sin(2\pi)} + 2\pi}{2} +$$

$$+ \frac{\overset{0}{\cos}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} - \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \pi - \frac{3}{4}\pi = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Pertanto (vedi anche pag. 49) si ottiene che il nostro integrale di partenza I_2 è

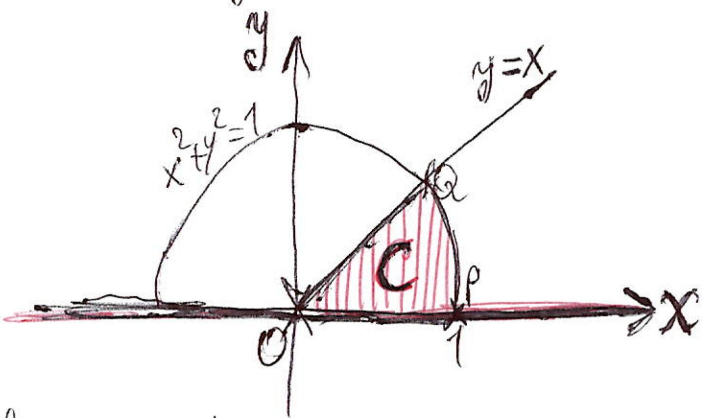
$$\boxed{I_2} = \iint_C (x+y^2)\, dx\, dy = \frac{37}{3} + \frac{175}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{37}{3} + \frac{175}{16}\pi.}$$

ESERCIZIO 3:

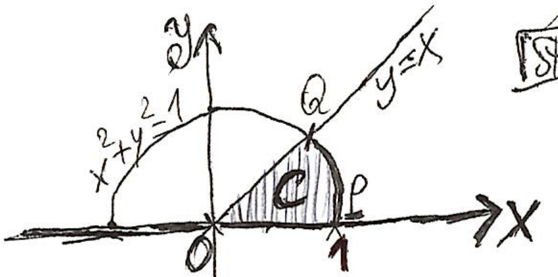
Calcolare $\mathcal{J}_3 = \iint_C (x+y)\, dx\, dy$,

ove C è la regione di piano delimitata dall' asse delle x, dalla semiretta positiva della bisettrice del 1° Quadrante e dalla parte nord della circonferenza goniometrica (cioè di centro l' origine e raggio 1)

Step 1) Disegniamo l' insieme C.



Abbiamo visto in precedenti esercizi che l' equazione della circonferenza di centro l' origine e raggio 1 è $x^2+y^2=1$, mentre l' equazione della bisettrice del 1° (e 3°) Quadrante è $y=x$. Visto che nella "frontiera" ("contorno") del dominio C è presente l' arco di circonferenza $\overset{\frown}{PQ}$, conviene passare alle coordinate polari (di solito questa è la regola, anche se ci possono essere alcune eccezioni, cioè alcuni casi in cui è meglio usare le coordinate cartesiane). Ma, nel dominio C, la

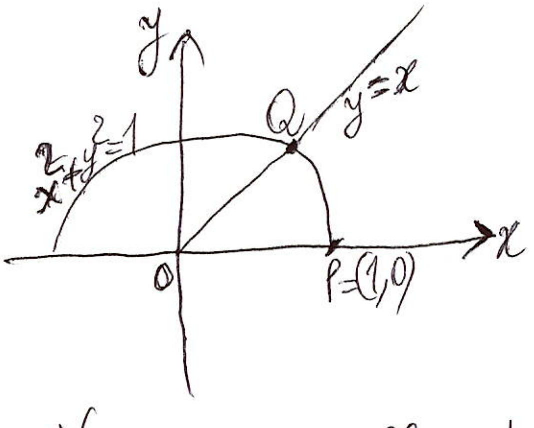


Step 2) distanza ρ dall'origine va da 0 a 1 (perché 1 è il raggio della circonferenza goniometrica) e l'angolo ϑ va da 0 a $\frac{\pi}{4}$. Perché 0 e $\frac{\pi}{4}$?

Intanto, al semiasse positivo delle **x** corrisponde l'angolo 0, perché per definizione, il calcolo dell'angolo ϑ viene fatto a partire proprio dal semiasse positivo delle x. Ora vediamo che alla retta $y=x$ corrisponde l'angolo di 45° (cioè $\frac{\pi}{4}$). Intanto siamo nel 1° Quadrante, quindi sicuramente il nostro angolo è **compreso** fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Ora sia

H il punto di intersezione tra l'asse x e la parallela all'asse y condotta dal punto Q. Il punto Q appartiene alla retta $y=x$, cioè la sua ascissa (OH) coincide con la sua ordinata (HQ). Pertanto il triangolo OQH è rettangolo e **isoscele**, e quindi gli angoli $O\hat{Q}H$ e $Q\hat{O}H$ sono uguali. Indicando con φ l'ampiezza (di uno di questi 2 angoli e quindi anche dell'altro angolo), si ha: $\varphi+\varphi+\frac{\pi}{2}=\pi$ (la somma degli angoli interni di un triangolo è $\pi = 180°$), da cui $2\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, e pertanto $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ($= 45°$).

Quindi abbiamo visto che C si può scrivere come



$$C = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \rho \le 1, \; 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\}$$

(senza perdita di generalità, scriviamo C anziché C', per semplicità).

Veniamo ora allo step 3).

$\boxed{\text{COORDINATE POLARI} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}}$

Abbiamo visto:

$$C = \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\rho\le 1,\ 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Step 3) Passiamo a calcolare il nostro integrale doppio. Si ha: (moltiplicando per il "FATTORE MAGICO" ρ)

$$J_3 = \iint_C (x+y)\,dx\,dy = \iint_C (\rho\cos\vartheta+\rho\sin\vartheta)\rho\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$\int_0^1 d\rho\int_0^{\pi/4}(\rho^2\cos\vartheta+\rho^2\sin\vartheta)\,d\vartheta = \left(\text{"spezziamo" la somma...}\right)$$

$$= \int_0^1 d\rho\left(\int_0^{\pi/4}\rho^2\cos\vartheta\,d\vartheta + \int_0^{\pi/4}\rho^2\sin\vartheta\,d\vartheta\right) =$$

$$= \int_0^1\rho^2\,d\rho\int_0^{\pi/4}\cos\vartheta\,d\vartheta + \int_0^1\rho^2\,d\rho\int_0^{\pi/4}\sin\vartheta\,d\vartheta =$$

(Applichiamo la FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1\cdot\left[\sin\vartheta\right]_0^{\pi/4} + \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1\cdot\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}-\cancel{0}\right)\cdot\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{=\sqrt{2}/2}-\underbrace{\sin 0}_{=0}\right) + \left(\frac{1}{3}-\cancel{0}\right)\cdot\left(-\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{=\sqrt{2}/2}+\underbrace{\cos 0}_{=1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = \left(\text{PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA}\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$